Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România
Filiala Galați

Colegiul Național "Vasile Alecsandri"
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați

Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
ediția a XIX-a
Galați, 10 noiembrie 2018

Clasa a XII –a

SOLUȚII

Problema 1.

Soluție. a) Din ipoteză rezultă că $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = e^x \cdot f^{2017}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = e^x \cdot f^{2017}(x)$, de unde rezultă că $-\frac{f'(x)}{f^{2019}(x)} = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar prin integrare avem $\frac{1}{2018 \cdot f^{2018}(x)} = e^x + c, \forall x \in \mathbb{R}$.

Din condiția $f(0) = \frac{1}{\sqrt[2018]{2018}}$ rezultă $c = 0$, deci $f^{2018}(x) = \frac{1}{2018 \cdot e^x}$, de unde rezultă că $f(x) = \frac{1}{\sqrt[2018]{2018}} \cdot e^{-\frac{x}{2018}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Împărțim relația din ipoteză prin e^{kx} și obținem $e^{-kx}\left(f'(x) - k \cdot f(x)\right) = \frac{e^{kx}}{e^{2kx}+3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $\left(f(x)e^{-kx}\right)' = \frac{e^{kx}}{e^{2kx}+3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde, prin integrare avem $f(x)e^{-kx} = \frac{1}{k\sqrt{3}} arctg \frac{e^{kx}}{\sqrt{3}} + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar constanta c se determină din condiția $f(0) = \frac{\pi}{6k\sqrt{3}}$, deci $c = 0$. Așadar, $f(x) = \frac{e^{kx}}{k\sqrt{3}} arctg \frac{e^{kx}}{\sqrt{3}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Problema 2.
Soluție.

Din ipoteză avem $x \cdot (y \cdot x)^{n-1} \cdot y = x \cdot x^{n-1} \cdot y^{n-1} \cdot y$, $\forall x, y \in G$, de unde, prin simplificare la stânga și la dreapta rezultă că $(y \cdot x)^{n-1} = x^{n-1} \cdot y^{n-1}$, iar prin înmulțire la dreapta cu $y \cdot x$ se obține $(y \cdot x)^n = x^{n-1} \cdot y^n \cdot x$, deci, ținând cont că $(y \cdot x)^n = y^n \cdot x^n$, rezultă că $y^n \cdot x^n = x^{n-1} \cdot y^n \cdot x$, iar prin simplificare la dreapta cu x se obține relația $y^n \cdot x^{n-1} = x^{n-1} \cdot y^n$, $\forall x, y \in G$ (1).

Pe de altă parte, din $ordG = n^2 - n - 1$, avem $x^{n^2-n-1} = e$, $\forall x \in G$, adică $x^{n^2-n} = x$, $\forall x \in G$. Atunci $x \cdot y = x^{n^2-n} \cdot y^{n^2-n} = \left(x^{n-1}\right)^n \cdot \left(y^n\right)^{n-1} = \left(y^n\right)^{n-1} \cdot \left(x^{n-1}\right)^n = y^{n^2-n} \cdot x^{n^2-n} = y \cdot x$, $\forall x, y \in G$, de unde rezultă concluzia problemei.

Problema 3.

Soluție. a). Prin reducere la absurd, dacă $f'(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci din aplicarea teoremei lui Lagrange pe intervalul $\left[x; x+f'(x)\right]$ (sau pe $\left[x+f'(x); x\right]$, unde $x\in\mathbb{R}$ este arbitrar fixat), rezultă că există $c_x\in\left(x; x+f'(x)\right)$ (sau $c_x\in\left(x+f'(x); x\right)$ astfel încât $0=f\left(x+f'(x)\right)-f(x)=f'(x)\cdot f'(c_x)$, contradicție. Deci ecuația $f'(x)=0$ are cel puțin o soluție reală.

b). Un exemplu ar fi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+c$, unde $c\in\mathbb{R}$ este constantă reală arbitrară.

c). Fie $a,b\in\mathbb{R},\ a<b$ astfel încât $f'(a)=f'(b)=0$. Demonstrăm mai întâi că f este funcție constantă pe intervalul $[a;b]$, adică $f'(x)=0, \forall x\in[a;b]$ **(1)**

Arătăm că , dacă $f'(a)=0$, atunci $f'(x)\leq 0, \forall x\in[a;+\infty)$, respectiv $f'(x)\geq 0, \forall x\in(-\infty;a]$ Presupunem prin reducere la absurd că există $x_0>a$ astfel încât $f'(x_0)>0$. Datorită continuității funcției f' , există un întreg interval $(c;d)\subset(a;+\infty), x_0\in(c;d)$, interval de lungime maximă, astfel încât $f'(x)>0, \forall x\in(c;d)$. Datorită maximalității intervalului $(c;d)$, avem $f'(c)=0$ și din nou datorită faptului că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x+f'(x)$ este continuă cu $g(c)=c$ și $g(x)>c$, $\forall x\in(c;d)$, rezultă existența unui punct $e\in(c;d)$ astfel încât $g(x)\in(c;d)\ \forall x\in(c;e)$. Alegem $x\in(c;e)$ și aplicăm din nou teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $\left[x; x+f'(x)\right]\subset(c;d)$, rezultă existența unui punct $c_x\in\left(x; x+f'(x)\right)$ astfel încât $0=f\left(x+f'(x)\right)-f(x)=f'(x)\cdot f'(c_x)$, adică $f'(x)=0$, sau $f'(c_x)=0$, contradicție cu $f'(x)>0, \forall x\in(c;d)$. Analog se demonstrează că $f'(x)\geq 0, \forall x\in(-\infty;a]$.

Aplicând din nou proprietățile de mai sus pentru $b\in\mathbb{R}, f'(b)=0$, rezultă că $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(-\infty;b]$, respectiv $f'(x)\leq 0, \forall x\in[b;+\infty)$. Deci pe intervalul $[a;b]$ avem simultan $f'(x)\leq 0, \forall x\in[a;b]$, respectiv $f'(x)\geq 0, \forall x\in[a;b]$, așadar $f'(x)=0, \forall x\in[a;b]$, deci f este funcție constantă pe intervalul $[a;b]$.

Fie $M=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, f'(x)=0\right\}$, mulțime care conform ipotezei conține cel puțin două elemente distincte și $\alpha=\inf M$, $\beta=\sup M$. Conform **(1)** rezultă că mulțimea M este un interval și $f(x)=k$, $\forall x\in M$. Arătăm că $\beta=+\infty$, $\alpha=-\infty$. Presupunem prin reducere la absurd că $\beta\in\mathbb{R}$. Atunci, din $\beta=\sup M$, rezultă că $\exists(x_n)\subset M, x_n\nearrow\beta$ iar din continuitatea funcției f' rezultă $f'(x_n)\to f'(\beta)$, de unde rezultă că $f'(\beta)=0$. Avem două cazuri:

1). Dacă există $\gamma>\beta$ astfel încât $g(\gamma)=\gamma+f'(\gamma)\geq\beta$, atunci din aplicarea teoremei lui Lagrange pe intervalul $\left[\gamma+f'(\gamma);\gamma\right]$ obținem $f'(\gamma)=0$, sau $f'(c_\gamma)=0$, unde $c_\gamma\in\left(\gamma+f'(\gamma),\gamma\right)$, adică $c_\gamma>\beta,\ \gamma>\beta$, contradicție cu $\beta=\sup M$.

2). În caz contrar, când pentru orice $x>\beta$ avem $g(x)<g(\beta)=\beta$, atunci , datorită continuității funcției g , există $\delta>\beta$ astfel $g(x)\in(\alpha;\beta), \forall x\in(\beta;\delta)$, dar atunci ar însemna că pentru $x\in(\beta;\delta)$, respectiv $g(x)\in(\alpha;\beta)$ am avea $f(x)=f\left(g(x)\right)=k$, contradicție cu $\beta=\sup M$.

Deci $\beta=+\infty$ și analog se demonstrează că $\alpha=-\infty$, de unde rezultă că $M=\mathbb{R}$, adică f este funcție constantă pe $\mathbb{R}$.